निकाय का इस बिन्दु के परितः आघूर्ण, $G' = G - hY + kX$.

प्रमेय 8. दृढ़ पिण्ड की साम्यावस्था के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध ज्ञात करना जबकि पिण्ड के विभिन्न बिन्दुओं पर एकतलीय बलों का एक निकाय क्रियाशील है।

(रायपुर 2005,09, 10; बिलासपुर 05; सरगुजा 11)

अथवा

एक दृढ़ पिण्ड पर क्रियाशील समतलीय बलों का निकाय इसे साम्यावस्था में रखता है। यदि तीन असमरेखीय बिंदुओं में से प्रत्येक के सापेक्ष बलों के आघूर्णों का बीजीय योग शून्य हो।

प्रमाण (Proof)—माना किसी बिन्दु O से कार्तीय अक्षों का एक युग्म Ox एवं Oy गुजरता है। माना पिण्ड के विभिन्न बिन्दुओं $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, ... (देखें प्रमेय 6 का चित्र) पर एकतलीय बल क्रियाशील हैं। माना Ox एवं Oy के अनुदिश इन बलों के घटक क्रमशः $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots$ एवं

$Y_1, Y_2, Y_3, \ldots\ldots$ हैं। तब बलों के इस निकाय को O से होकर जाने वाले एक एकल बल R तथा एक बलयुग्म G में समानयन किया जा सकता है। जहाँ $X = \Sigma X_1, Y = \Sigma Y_1$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} \text{ एवं } G = \Sigma(Y_1 x_1 - X_1 y_1) \qquad \ldots(1)$$

माना कि पिण्ड साम्यावस्था में है। चूँकि एकल बल R पिण्ड में रैखिक गति देता है तथा बलयुग्म घूर्णन गति देता है, अतएव साम्यावस्था के लिए आवश्यक प्रतिबंध है :

$$R = 0 \text{ तथा } G = 0$$

अर्थात् $\sqrt{X^2 + Y^2} = 0$ तथा $G = 0$

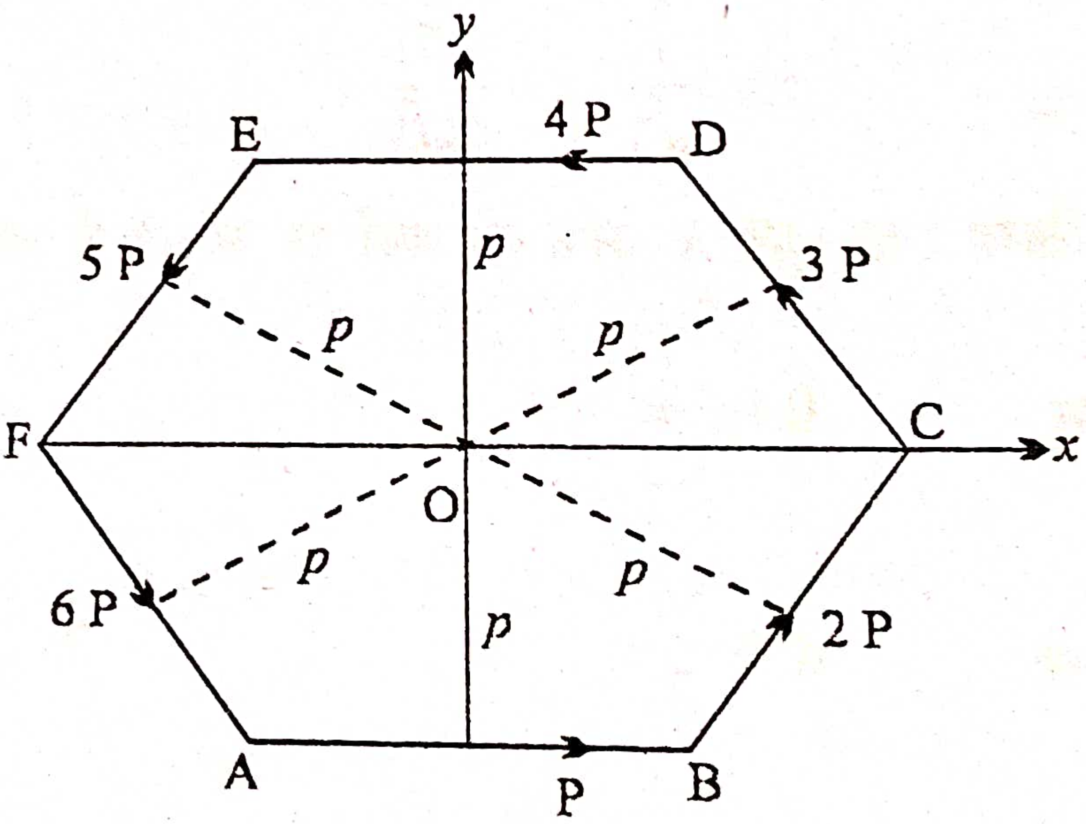
अर्थात् $X = 0, Y = 0$ तथा $G = 0$.

अतः दिये गये बल साम्यावस्था में होंगे। प्रमाणित।

उदाहरण 5. एक नियमित समषट्भुज की भुजाओं के अनुदिश क्रम से 1, 2, 3, 4, 5, 6 इकाई के बल लगते हैं। दर्शाइये कि यह एक एकल बल के तुल्य है जिसका परिमाण 6 इकाई है तथा यह 5 इकाई वाले बल के समान्तर रेखा के अनुदिश लगती है जिसकी दूरी समषट्भुज के केन्द्र से उस दूरी का $3\frac{1}{2}$ गुना है जो कि एक भुजा की केन्द्र से दूरी है।

(बिलासपुर 2007; रायपुर 13)

हल : माना O समषट्भुज का केन्द्र है जिससे गुजरने वाले कार्तीय अक्ष Ox एवं Oy हैं जो क्रमशः AB एवं AB के लम्ब दिशा के अनुदिश हैं।



चित्र

माना कि दिये गये बलों का x-अक्ष एवं y-अक्ष के अनुदिश वियोजित भागों का बीजीय योग क्रमश: X तथा Y हैं तथा माना G इनका बिन्दु O के परित: आघूर्णों का बीजीय योग है। माना समषट्भुज की भुजाओं के अनुदिश बल $P, 2P, 3P, 4P, 5P$ तथा $6P$ लगते हैं। तब,

$$X = P + 2P\cos 60^\circ - 3P\cos 60^\circ - 4P - 5P\cos 60^\circ + 6P\cos 60^\circ$$

$$= P + 2P.\frac{1}{2} - 3P.\frac{1}{2} - 4P - 5P.\frac{1}{2} + 6P.\frac{1}{2}$$

$$= -3P$$

$$Y = P\sin 0^\circ + 2P\sin 60^\circ + 3P\sin 60^\circ + 4P\sin 0^\circ - 5P\sin 60^\circ - 6P\sin 60^\circ$$

$$= P.0 + 2P.\frac{\sqrt{3}}{2} + 3P.\frac{\sqrt{3}}{2} + 4P.0 - 5P.\frac{\sqrt{3}}{2} - 6P.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -3\sqrt{3}P$$

तथा $$G = P.p + 2P.p + 3P.p + 4P.p + 5P.p + 6P.p, \text{ [जहाँ } p \text{ केन्द्र से भुजाओं की दूरी है]}$$

$$= 21P.p$$

अत: दिये गये बलों के परिणामी का परिमाण,

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{\{(-3P)^2 + (-3\sqrt{3}P)^2\}}$$

$$= 6P$$

परिणामी की दिशा,

$$\tan\theta = \frac{Y}{X} = \frac{-3\sqrt{3}P}{-3P} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60^\circ.$$

तथा परिणामी का समीकरण है :

$$xY - yX - G = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(-3\sqrt{3}P) - y(-3P) - 21P.p = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3}x - y + 7p = 0$$

अत: $O\,(0,0)$ से परिणामी के क्रिया-रेखा की दूरी

$$= \frac{\sqrt{3}.0 - 0 + 7p}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{7}{2}p$$

$$= 3\frac{1}{2}p.$$

प्रमाणित।

उदाहरण 6. कार्तीय अक्षों के सापेक्ष बिन्दुओं (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) के परित: बलों के एक निकाय के आघूर्णों का बीजीय योग क्रमश: G_1, G_2, G_3, G_4 हैं। सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & G_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & G_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & G_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & G_4 \end{vmatrix} = 0.$$

हल : माना X तथा Y कार्तीय अक्षों के अनुदिश दिये गये बलों के घटकों के बीजीय योग हैं तथा मूलबिन्दु O के परित: निकाय का आघूर्ण G है। यदि G' बलों के तल में किसी बिन्दु (h, k) के परित: निकाय का आघूर्ण हो, तब

$$G' = G - hY + kX$$

अर्थात् $$G - hY + kX - G' = 0 \qquad ...(1)$$

अत: दिये गये चारों बिन्दुओं के परित: आघूर्ण लेने पर समी. (1) से हम पाते हैं कि

$$G - x_1Y + y_1X - G_1 = 0 \qquad ...(2)$$

$$G - x_2Y + y_2X - G_2 = 0 \qquad ...(3)$$

$$G - x_3Y + y_3X - G_3 = 0 \qquad ...(4)$$

तथा $$G - x_4Y + y_4X - G_4 = 0 \qquad ...(5)$$

अब समी. (2), (3), (4) तथा (5) से G, X तथा Y को विलोपित करने पर हम पाते हैं कि

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & G_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & G_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & G_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & G_4 \end{vmatrix} = 0.$$

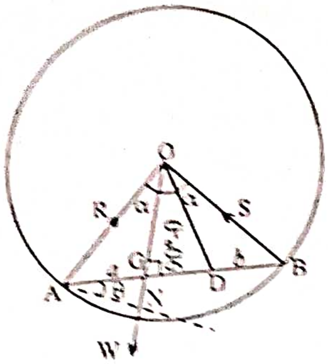
प्रमाणित।

उदाहरण 7. एक दण्ड, जिसका गुरुत्व केन्द्र उसे a और b दो भागों में विभाजित करता है, एक चिकने गोले के भीतर रखी हुई है। दर्शाइये कि यदि संतुलित अवस्था में क्षैतिज से उसका झुकाव θ है और गोले के केन्द्र पर दण्ड 2α कोण अन्तरित करती है, तो

$$\tan\theta = \frac{b-a}{b+a}\tan\alpha.$$

(रायपुर 2006, 08, 09; सागर 10; सरगुजा 10)

हल : माना कि दण्ड AB का गुरुत्व केन्द्र उसे दो भागों, $AG = a$ तथा $GB = b$ में बाँटता है। माना दण्ड AB एक चिकने गोले के भीतर रखी हुई है तथा O गोले का केन्द्र है। माना $\angle AOB = 2\alpha$.



अब साम्यावस्था में, दण्ड AB के सिरे A की गोले पर प्रतिक्रिया R, सिरे B को गोले पर प्रतिक्रिया S तथा दण्ड AB के भार W की क्रिया रेखा OG तीनों बिन्दु O पर मिलेगी।

माना A से खींची गयी क्षैतिज रेखा, उदग्र रेखा OG को N पर काटती है तथा माना $\angle DAN = \theta$.

तब, $\angle AGN = \angle OGD = 90° - \theta$.

पुनः $\angle ODG = 90°$, अतएव, $\angle GOD = \theta$.

अतः त्रिकोणमितीय प्रमेय,

$$(m+n)\cot\theta = n\cot A - m\cot B$$

से हमें प्राप्त होता है :

$$(a+b)\cot\angle OGB = b\cot\angle OAB - a\cot\angle OBA$$

अर्थात् $(a+b)\cot(90° - \theta)$

$$= b\cot(90° - \alpha) - a\cot(90° - \alpha)$$

अर्थात् $(a+b)\tan\theta = b\tan\alpha - a\tan\alpha$

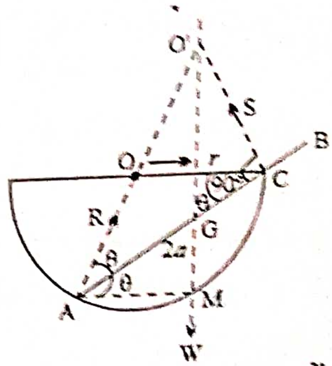
अर्थात् $\tan\theta = \dfrac{b-a}{b+a}\tan\alpha.$ प्रमाणित।

उदाहरण 8. एक भारी एक समान छड़ जिसकी लम्बाई $2a$ है, का कुछ भाग एक चिकने अर्द्धगोल प्याले के अन्दर रखा है और कुछ भाग बाहर है, प्याले का किनारा क्षैतिज है और उसकी त्रिज्या r है, और छड़ का एक बिन्दु किनारे को स्पर्श करता है। यदि छड़ क्षैतिज से कोण θ बनाती है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$2r\cos 2\theta = a\cos\theta. \quad \text{(रायपुर 2008)}$$

अतः दर्शाइये कि क्षैतिज से महत्तम झुकाव जिसमें कि एक समान छड़ एक स्थिर चिकने अर्द्धगोल प्याले के आंशिक रूप से अन्दर और आंशिक रूप से बाहर रह सकता है, $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$ है।

हल : भाग I. माना AB लम्बाई $2a$ का एकसमान छड़ है जिसका गुरुत्व केन्द्र G है तथा जिसका एक सिरा A उस अर्द्धगोल प्याले के अन्दर है जिसका केन्द्र O है एवं दूसरा सिरा अर्द्धगोले के बाहर है। AB का भाग C अर्द्धगोले के किनारे से मिलता है।



अब छड़ AB गोले के अन्दर साम्यावस्था में होगा, यदि

(i) सिरे A पर अर्द्धगोले की प्रतिक्रिया R की क्रिया रेखा,

(ii) C पर प्रतिक्रिया S की क्रियारेखा CO' तथा

(iii) छड़ AB के गुरुत्व केन्द्र G से गुजरने वाले भार W की क्रिया-रेखा $O'G$, सभी एक बिन्दु O' पर मिलती हों।

छड़ AB क्षैतिज के साथ कोण θ बनाता है अतः $\angle BAM = \theta$ तथा अर्द्धगोल प्याले की त्रिज्या $OC = r$, है। AM रेखा $O'G$ के बढ़े हुए भाग को M पर काटता है।

चूँकि $\angle ACO' = 90°$, अतएव $AO' = 2AO = 2r$.

अब चित्र से स्पष्ट है कि

$$\angle MAC = \angle ACO = \theta$$

$$\therefore \quad \angle OAC = \theta, \qquad [\because OA = OC$$

$$\therefore \quad \angle O'AM = 2\theta$$

अब समकोण त्रिभुज $O'AM$ से,

$$AM = O'A\cos 2\theta = 2r\cos 2\theta$$

पुनः ΔGAM से,

$$AM = AG\cos\theta = a\cos\theta$$

अतः समी. (1) तथा (2) से,

$$2r\cos 2\theta = a\cos$$

यह भाग एक सिद्ध करता है।

भाग II. समी. (3) से,

$$2r(2\cos^2\theta - 1) = a\cos\theta$$

अर्थात् $4r\cos^2\theta - a\cos\theta - 2r = 0$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{a + \sqrt{a^2 + 32r^2}}{8r},$$

(ऋणात्मक मान θ का मान अधिक कोण बना देता है।)

अब अभीष्ट महत्तम झुकाव के लिए, छड़ की न्यूनतम लम्बाई $AC = 2a$ लेना पड़ेगा तथा उस स्थिति में

$$AC = 2OA\cos\theta$$

अर्थात् $$2a = 2r\cos\theta$$

अर्थात् $$a = r\cos\theta$$

a के इस मान को समी. (4) में रखने पर,

$$\cos\theta = \frac{r\cos\theta + \sqrt{r^2\cos^2\theta + 32r^2}}{8r}$$

अर्थात् $$8r\cos\theta = r\cos\theta + r\sqrt{\cos^2\theta + 32}$$

अर्थात् $$7\cos\theta = \sqrt{\cos^2\theta + 32}$$

अर्थात् $$48\cos^2\theta = 32$$

अर्थात् $$\cos^2\theta = \frac{2}{3}$$

अर्थात् $$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

अर्थात् $$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$$

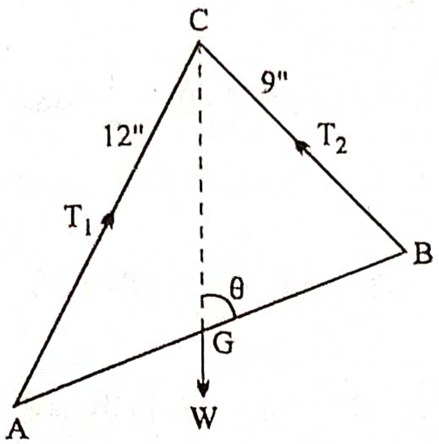
उदाहरण 18. एक 15 इंच लम्बा भारी समांग छड़ एक नियत बिन्दु से एक डोरी द्वारा दोनों सिरों पर बाँधकर लटकाया गया है, नियत बिन्दु के दोनों तरफ इन डोरियों की लम्बाइयाँ 9 इंच तथा 12 इंच हैं। यदि छड़ उदग्र के साथ कोण θ पर झुका हो, तो दर्शाइये कि $25\sin\theta = 24$ अर्थात् $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{24}{25}\right)$. (रायपुर 2004)

हल : छड़ AB निम्न तीन बलों के अन्तर्गत संतुलन में है :

(i) इसके मध्य बिन्दु G पर नीचे की ओर लगने वाला भार W,

(ii) डोरी AC में तनाव T_1 तथा

(iii) डोरी BC में तनाव T_2.



चित्र

चूँकि दो बल T_1 तथा T_2 बिन्दु C पर मिलते हैं, अतएव तीसरा बल W भी C से गुजरेगा।

पुन: $12^2 + 9^2 = 15^2$, अतएव ΔABC में हम पाते हैं कि

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

$$\therefore \qquad \angle ACB = 90^\circ$$

अब ΔABC के लिए त्रिकोणमितीय सूत्र " $(m+n)\cot\theta = m\cot A - n\cot B$ " लगाने पर हम पाते हैं कि

$$\left(7\frac{1}{2} + 7\frac{1}{2}\right)\cot\theta = 7\frac{1}{2}\cot A - 7\frac{1}{2}\cot B$$

$$\Rightarrow \qquad 2\cot\theta = \cot A - \cot B$$

$$= \frac{CA}{BC} - \frac{BC}{CA}, \qquad \text{(चित्र से)}$$

$$= \frac{12}{9} - \frac{9}{12}$$

$$= \frac{7}{12}$$

$$\Rightarrow \qquad \cot\theta = \frac{7}{24}$$

$$\therefore \qquad \sin\theta = \frac{24}{25}$$

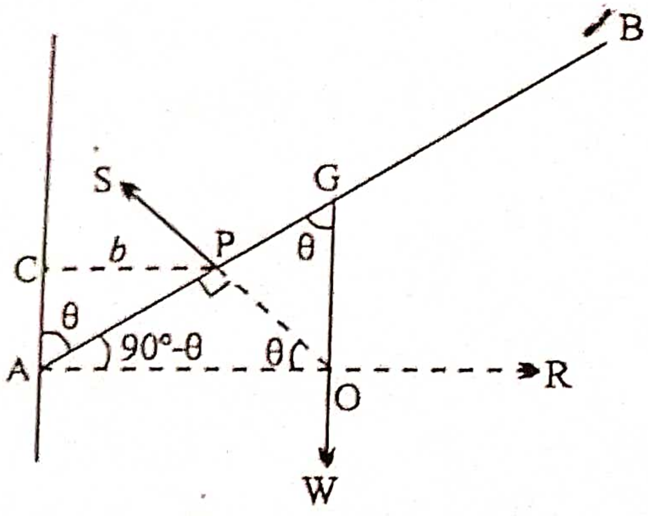
$$\Rightarrow \qquad 25\sin\theta = 24.$$

प्रमाणित।

उदाहरण 25. लम्बाई $2a$ की एक समांग छड़ साम्यावस्था में एक चिकने उदग्र दिवाल तथा दिवाल से दूरी b पर स्थित एक खूँटी के सहारे है। दर्शाइये कि खम्भे का उदग्र के साथ झुकाव $\sin^{-1}(b/a)^{1/3}$ है।

(बिलासपुर 2008, 09, 11; रायपुर 07, 09)

हल : माना कि छड़ AB का गुरुत्व केन्द्र G है तथा यह दिवाल AC से विन्दु A पर तथा खूँटी P पर सम्पर्क में है। तब, $AG = GB = a$. माना कि दिवाल की A पर प्रतिक्रिया R तथा खूँटी की P पर प्रतिक्रिया S विन्दु O पर मिलती है। तब छड़ AB का G पर नीचे की ओर लगने वाला भार W भी O से गुजरेगा।



चित्र

अब ΔACP में,

$$\sin\theta = \frac{CP}{AP} = \frac{b}{AP} \qquad ...(1)$$

ΔAOP में,

$$\sin\theta = \frac{AP}{OA} \qquad ...(2)$$

$4OG$ में,

$$\sin\theta = \frac{OA}{AG} = \frac{OA}{a} \qquad ...(3)$$

अतः समी. (1), (2) तथा (3) का गुणा करने पर हम पाते हैं कि

$$\sin^3\theta = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \qquad \theta = \sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{1/3}.$$

प्रमाणित।

$$= \frac{d\tan^2\alpha}{\sqrt{c^2-d^2}\tan\alpha},$$

$$[\because r = \sqrt{c^2-d^2}\tan\alpha]$$

$$= \frac{d\tan\alpha}{\sqrt{c^2-d^2}}$$

यह हमें साम्य की स्थिति देता है जो उदग्र नहीं है और उस स्थिति में गुरुत्व केन्द्र की गहराई r न्यूनतम अथवा एक नियत बिन्दु के ऊपर इसका ऊँचाई महत्तम है और इस कारण साम्य अस्थायी है।

प्रमाणित।

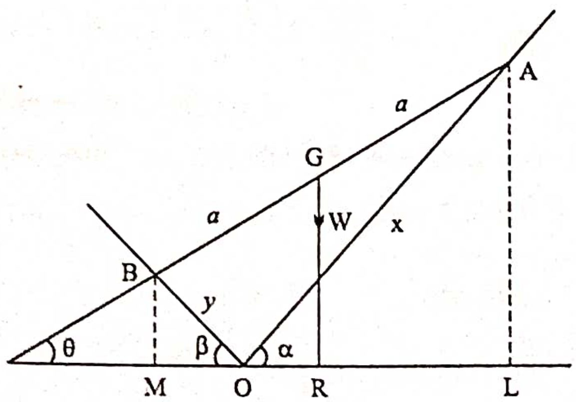
उदाहरण 4. लम्बाई l का एक समांग शहतीर अपने सिरों से दो चिकने समतलों पर टिका है जो एक क्षैतिज रेखा में प्रतिच्छेद करते हैं। यदि समतलों के क्षैतिज के साथ झुकाव α तथा β $(\alpha > \beta)$ हों, तो दर्शाइये कि साम्यों की एक स्थिति में शहतीर का क्षैतिज के साथ झुकाव θ सम्बन्ध $2\tan\theta = \cot\beta - \cot\alpha$ द्वारा दिया जाता है तथा दर्शाइये कि इस स्थिति में शहतीर अस्थायी है। **(रायपुर 2007, 09; बिलासपुर 10)**

हल : माना कि OA तथा OB दो चिकने समतल हैं जो क्षैतिज से क्रमशः α तथा β कोण पर झुके हैं। माना इन तलों के बीच टिके समांग शहतीर AB का गुरुत्व केन्द्र G है।

माना कि $AB = l = 2a$ तथा इसका क्षैतिज से झुकाव θ है। माना $OA = x$ तथा $OB = y$. अब O से गुजरने वाले क्षैतिज तल से G की ऊँचाई,

$$z = GR = \frac{1}{2}(AL + BM)$$

$$= \frac{1}{2}(x\sin\alpha + y\sin\beta) \quad ...(1)$$



चित्र

अब ΔAOB में,

$\angle ABO = \theta + \beta, \angle OAB = \alpha - \theta$ तथा

$$\angle AOB = \pi - (\alpha + \beta).$$

$$\therefore \frac{x}{\sin(\beta+\theta)} = \frac{y}{\sin(\alpha-\theta)} = \frac{2a}{\sin(\alpha+\beta)} \quad ...(2)$$

अब समी. (2) से प्राप्त x तथा y के मान को समी. (1) में रखने पर हम पाते हैं कि

$$z = \frac{1}{2}\frac{2a}{\sin(\alpha+\beta)}[\sin(\beta+\theta)\sin\alpha + \sin(\alpha-\theta)\sin\beta]$$

साम्यावस्था के लिए $\dfrac{dz}{d\theta} = 0$

$$\therefore \frac{dz}{d\theta} = \frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}[\sin\alpha\cos(\beta+\theta) - \cos(\alpha-\theta)\sin\beta] = 0$$

$$\therefore \sin\alpha(\cos\beta\cos\theta - \sin\beta\sin\theta) - (\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta)\sin\beta = 0$$

$$\Rightarrow \cos\theta(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) - \sin\theta(\sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 0$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{2\sin\alpha\sin\beta}$$

$$= \frac{1}{2}(\cot\beta - \cot\alpha) \quad ...$$

पुनः $$\frac{d^2z}{d\theta^2} = \frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}[-\sin\alpha\sin(\beta+\theta) - \sin\beta\sin(\alpha-\theta)]$$

$$= -\frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}[\sin\theta(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha) + \cos\theta(\sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha\sin\beta)]$$

$$= -\frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}.2\sin\alpha\sin\beta\cos\theta \left[\frac{\tan\theta}{2}(\cot\beta - \cot\alpha) + 1\right]$$

$$= -\frac{2a\sin\alpha\sin\beta\cos\theta}{\sin(\alpha+\beta)}[\tan^2\theta + 1],$$

[समी. (3) से

< 0, क्योंकि α, β, θ तथा $\alpha+\beta$ न्यून कोण हैं।

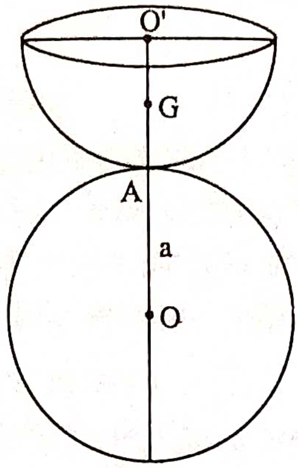
अतः साम्य अस्थायी है। **प्रमाणित।**

$W < 2W$. प्रमाणित।

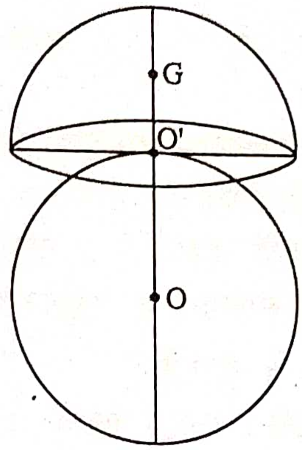
उदाहरण 6. एक अर्द्धगोला समान त्रिज्या के एक गोले पर साम्यावस्था में टिका है; दर्शाइये कि साम्यावस्था अस्थायी होगी जब अर्द्धगोले का वक्र भाग तथा स्थायी होगी जब अर्द्धगोले का समतल भाग गोले पर टिका हो।

(बिलासपुर 2008; रायपुर , 05, 11; बस्तर 12)

हल : प्रथम स्थिति— जब अर्द्धगोले का वक्र भाग गोले पर टिका हो [चित्र (a)]।



चित्र (a)



चित्र (b)

हम जानते हैं कि अर्द्धगोले का गुरुत्व केन्द्र अपने केन्द्र से $\dfrac{3a}{8}$ दूरी पर केन्द्रीय त्रिज्या पर होता है, जहाँ अर्द्धगोले एवं गोले की त्रिज्याएँ $r = R = a$ (दिया है),

अत: सम्पर्क बिन्दु A से गुरुत्व केन्द्र की ऊँचाई,

$$h = a - \frac{3a}{8} = \frac{5a}{8}.$$

$$\therefore \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{2}{a} > \frac{8}{5a} = \frac{1}{h}$$

अत: साम्य अस्थायी है।

द्वितीय स्थिति— जब अर्द्धगोले का समतल भाग गोले पर टिका हो [चित्र (b)]।

इस स्थिति में $r = \infty$, गुरुत्व केन्द्र G की सम्पर्क बिन्दु O' से ऊँचाई $= h = \dfrac{3a}{8}$ तथा $R = a.$

$$\therefore \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{r} = \frac{1}{a} < \frac{8}{3a}.$$

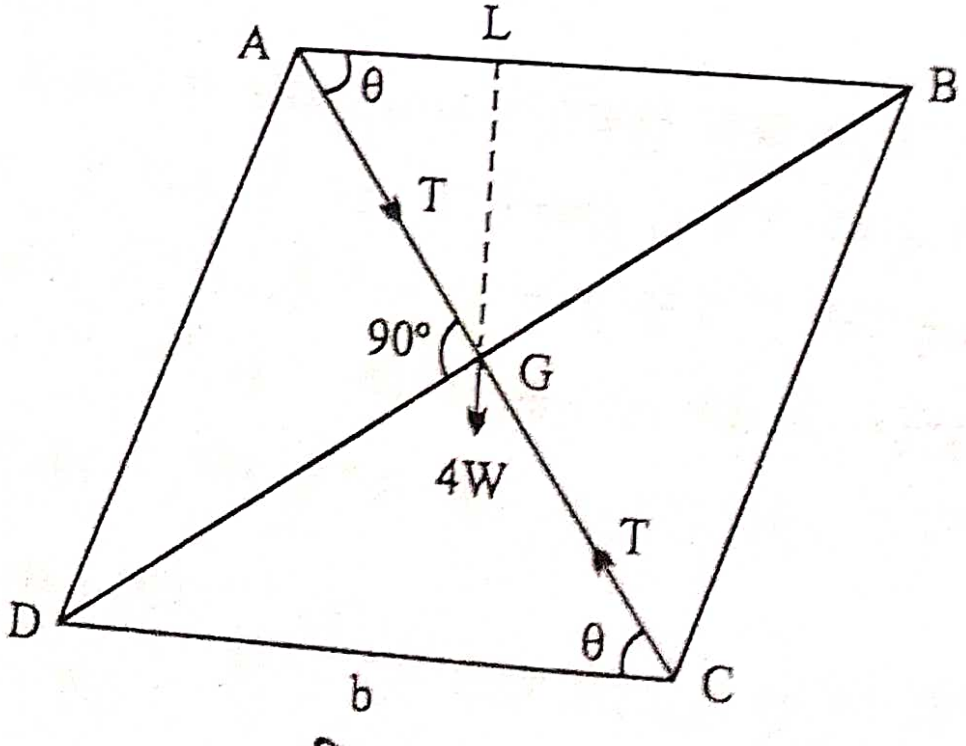
अत: साम्य स्थायी है। **प्रमाणित।**

उदाहरण 11. चार समांग छड़ों को एक-दूसरे से ट
बने समचतुर्भुज, प्रत्येक की लम्बाई b तथा भार W
छोटा विकर्ण लम्बाई a का एक डोरी बनाता है। यदि
छड़ को क्षैतिज स्थिति में रखा जाय, तो सिद्ध कीजि

डोरी का तनाव $\dfrac{2W(2b^2 - a^2)}{b\sqrt{4b^2 - a^2}}$ है।

(बिलासपुर 2004, 11; रायपुर

हल : माना कि लम्बाई b एवं भार W के चार समांग छड़
बने समचतुर्भुज $ABCD$ का केन्द्र G है जहाँ पर इसका कुल
$4W$ लगता है। माना कि इसके छोटे विकर्ण AC को जिसे डो
बाँधा गया है उसमें तनाव T है तथा AC की लम्बाई a है। म
कि AC क्षैतिज छड़ AB के साथ θ कोण बनाता है।



चित्र

अब $AG = AB\cos\theta = b\cos\theta$

$\therefore$ $AC = 2AG = 2b\cos\theta$ ...(1)

पुन : $GL = AG\sin\theta$

$= b\cos\theta\sin\theta$

$= \frac{1}{2}b\sin 2\theta$ ...(2)

अब निकाय में एक छोटा विस्थापन इस प्रकार देते हैं कि θ बदलकर $\theta+\delta\theta$ हो जाता है। तब आभासी कार्य का समीकरण है :

$$4W.\delta(GL) - T.\delta(AC) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4W.\delta\left(\frac{1}{2}b\sin 2\theta\right) - T.\delta(2b\cos\theta) = 0,$$

[समी. (1) तथा (2) से]

$$\Rightarrow \quad 4bW\cos 2\theta + 2bT\sin\theta = 0,$$

$[\because \delta\theta \neq 0]$

$$\Rightarrow \quad T = -\frac{2W\cos 2\theta}{\sin\theta}$$

अब साम्यावस्था में, $AC = a$. अतएव समी. (1) से,

$$\cos\theta = \frac{a}{2b}$$

$$\therefore \quad T = -2W.\frac{(2\cos^2\theta - 1)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$$

$$= -2W.\frac{2.\frac{a^2}{4b^2} - 1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{4b^2}}}$$

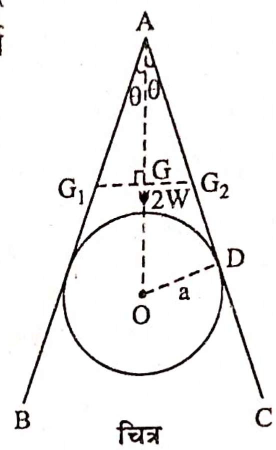
$$= \frac{2W(2b^2 - a^2)}{b\sqrt{4b^2 - a^2}}.$$ **प्रमाणित।**

उदाहरण 12. दो समान समांग छड़ AB तथा AC, प्रत्येक लम्बाई $2b$ का, A पर मुक्त रूप से जुड़ा हुआ है तथा त्रिज्या a के एक चिकने उदग्र वृत्त पर स्थित है। यदि इनके बीच का कोण 2θ हो, तो दर्शाइये कि

$$b\sin^3\theta = a\cos\theta.$$

(बिलासपुर 2007, 10, 11, 13; रायपुर 05,08, 11; बस्तर 12; सरगुजा 12)

हल : माना कि G_1 तथा G_2 क्रमशः छड़ों AB तथा AC के मध्य बिन्दु हैं। माना कि G_1G_2 का मध्य बिन्दु G है। यदि W छड़ों AB एवं AC के भार हों, तो इनके कुल भार $2W$ बिन्दु G पर लगेंगे। माना कि O उदग्र वृत्त का केन्द्र है तथा छड़ AC वृत्त को D पर स्पर्श करता है। तब स्पष्टत:



चित्र

$\angle ODA = 90°$

माना $\angle OAD = \theta.$

तब, $OA = a\,\text{cosec}\,\theta$

पुनः ΔAGG_1 से,

$AG = AG_1\cos\theta$

$= b\cos\theta$

$\therefore$ $OG = OA - AG$

माना कि दूरियाँ O से ऊपर की दिशा में नापी गयी हैं। अब हम निकाय में एक छोटा विस्थापन इस प्रकार देते हैं कि θ बदलकर $\theta+\delta\theta$ हो जाता है। तब आभासी कार्य का समीकरण है :

$$-2W.\delta(OG) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \delta(OG) = 0, \quad [\because W \neq 0]$$

$$\Rightarrow \quad \delta(a\,\text{cosec}\,\theta - b\cos\theta) = 0, \quad [\text{समी. (1) से}]$$

$$\Rightarrow \quad -a\,\text{cosec}\,\theta\cot\theta + b\sin\theta = 0, \quad [\because \delta\theta \neq 0]$$

$$\Rightarrow \quad b\sin^3\theta = a\cos\theta.$$ **प्रमाणित।**

नोट— सम्बन्ध $b\sin^3\theta = a\cos\theta$ से निम्न सम्बन्ध भी प्राप्त किये जा सकते हैं:

(i) $\text{cosec}^2\theta.\cot\theta = \frac{b}{a}$

(ii) $b = a\cot\theta + b\cos^2\theta.$

उदाहरण 13. एक प्रिज्म (prism) जिसका अनुप्रस्थ काट (cross section) एक समबाहु त्रिभुज (equilateral triangle) है अपने दो कोरों (edges) के साथ चिकने समतलों पर टिके हैं जो क्षैतिज के साथ कोण α कोण β पर झुके हैं। यदि θ वह कोण है जो इन कोरों से गुजरने वाला तल उदग्र के साथ बनाता है, तो दर्शाइये कि

$$\tan\theta = \frac{2\sqrt{3}\sin\alpha\sin\beta + \sin(\alpha+\beta)}{\sqrt{3}\sin(\beta-\alpha)}.$$

हल : माना कि प्रिज्म के अनुप्रस्थ काट समबाहु ΔABC

यहाँ $\theta = \frac{\pi}{2}$ ...

प्रमाणित।

उदाहरण 24. हल्के छड़ों को चिकने रूप में जोड़कर बनाये गये चतुर्भुज के विपरीत भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को लम्बाई l तथा l' के हल्के छड़ों द्वारा जोड़ा गया है। यदि T तथा T' इन छड़ों में तनाव हो, तो सिद्ध कीजिए कि—

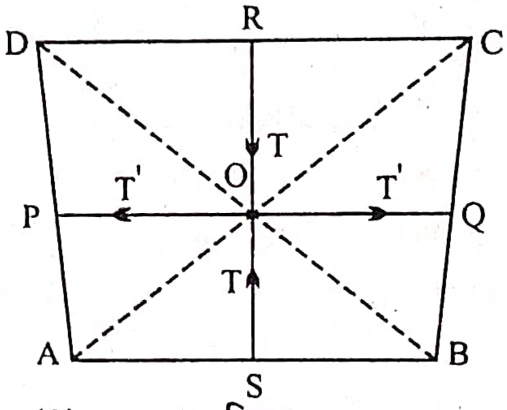
$$\frac{T}{l} + \frac{T'}{l'} = 0.$$

(बिलासपुर 2008,11; रायपुर 10)

हल : माना $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ तथा $DA = d$. माना कि छड़ RS में तनाव T तथा छड़ PQ में तनाव T' हैं जहाँ $RS = l$ एवं $PQ = l'$ एवं P, Q, R और S क्रमश: AD, BC, CD और AB के मध्य बिन्दु हैं।

अब हम निकाय में छोटा आभासी विस्थापन देते हैं जिससे l बदलकर $l + \delta l$ तथा l' बदलकर $l' + \delta l'$ हो जाता है। तब आभासी कार्य का समीकरण है :

$$-T\delta l - T'\delta l' = 0 \quad ...(1)$$



चित्र

पुन: माना कि RS एवं PQ का प्रतिच्छेद बिन्दु O है। तब चूँकि OS त्रिभुज OAB की माध्यिका है, अतएव

$$OA^2 + OB^2 = 2OS^2 + 2AS^2, \text{ समतल ज्यामिति से।}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}RS\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}AB\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}RS^2 + \frac{1}{2}AB^2 \quad ...(2)$$

इसी प्रकार ΔBOC की माध्यिका OQ है।

$$\therefore OB^2 + OC^2 = \frac{1}{2}PQ^2 + \frac{1}{2}BC^2 \quad ...(3)$$

अब समी. (3) को (2) से घटाने पर,

$$2(OA^2 - OC^2) = RS^2 - PQ^2 + AB^2 - BC^2 \quad ...(4)$$

इसी प्रकार ΔCOD एवं ΔDOA से,

$$2(OA^2 - OC^2) = PQ^2 - RS^2 + AD^2 - CD^2 \quad ...(5)$$

अब समी. (4) तथा (5) से,

$$2(RS^2 - PQ^2) = BC^2 + AD^2 - AB^2 - CD^2$$

$$\Rightarrow \quad 2(l^2 - l'^2) = b^2 + d^2 - a^2 - c^2$$

अतएव अवकलन करने पर,

$$l\delta l - l'\delta l' = 0 \quad ...(6)$$

अत: समी. (1) तथा (6) से,

$$-\frac{T}{l} = \frac{T'}{l'}$$

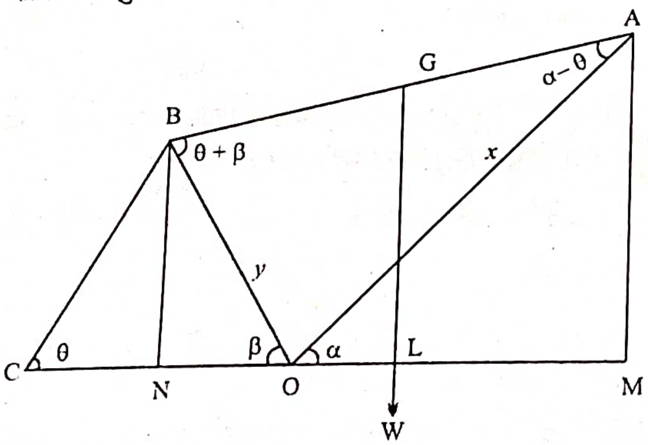
$$\Rightarrow \quad \frac{T}{l} + \frac{T'}{l'} = 0.$$ प्रमाणित।

उदाहरण 25. 2a लम्बाई की एक भारी समांग छड़ के दोनों सिरे, दो चिकने तट समतलों के सम्पर्क में रखे हैं जहाँ क्षैतिज से समतलों का झुकाव क्रमशः α तथा β हैं। यदि साम्यावस्था में छड़ का क्षैतिज से झुकाव θ हो तो कुल कल्पित कार्य के सिद्धान्त (Theory of virtual work) से सिद्ध कीजिए कि :

$$\tan\theta = \frac{1}{2}(\cot\beta - \cot\alpha).$$

(रायपुर 2007, 09; बिलासपुर 10; सरगुजा 11)

हल : माना कि AB एकसमान छड़ की स्थिति है जिसके सिरे A और B दो चिकने नत समतलों OA तथा OB पर टिकी है तथा क्षैतिज से झुकाव θ इस प्रकार है कि



चित्र : छड़ AB के ठीक मध्य बिन्दु G पर भार W नीचे की ओर है।

$\angle AOM = \alpha, \angle BON = \beta,$

$\angle ABO = \beta + \theta, \angle BAO = \alpha - \theta,$

$\angle BOA = 180^\circ - (\alpha + \beta), AB = 2a.$

माना कि छड़ का गुरुत्व केन्द्र G है तथा इसकी O से ऊँचाई z है जिससे कि $GL = z.$

माना कि $OA = x, OB = y$, तब,

$$z = GL = \frac{1}{2}(AM + BN) = \frac{1}{2}(x\sin\alpha + y\sin\beta) \quad ...(1)$$

ΔAOB में ज्या (sine) सूत्र के प्रयोग से,

$$\frac{x}{\sin(\beta+\theta)} = \frac{y}{\sin(\alpha-\theta)} = \frac{2a}{\sin\{180^\circ - (\alpha+\beta)\}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sin(\beta+\theta)} = \frac{y}{\sin(\alpha-\theta)} = \frac{2a}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\therefore \quad x = 2a\frac{\sin(\beta+\theta)}{\sin(\alpha+\beta)}, y = 2a\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin(\alpha+\beta)} \quad ...(2)$$

समी. (2) से x तथा y के मानों को समी. (1) में रखने पर,

$$z = \frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}.[\sin\alpha\sin(\beta+\theta) + \sin\beta\sin(\alpha-\theta)]$$

$$\therefore \quad \frac{dz}{d\theta} = \frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}[\sin\alpha\cos(\beta+\theta) - \sin\beta\cos(\alpha-\theta)]$$

साम्यावस्था के लिए आवश्यक प्रतिबंध है कि :

$$\frac{dz}{d\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin\alpha\cos(\beta+\theta) - \sin\beta\cos(\alpha-\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin\alpha(\cos\beta\cos\theta - \sin\beta\sin\theta) - \sin\beta(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta(-\sin\alpha\sin\beta - \sin\alpha\sin\beta) + \cos\theta(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{2\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos\beta}{\sin\beta} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{1}{2}(\cot\beta - \cot\alpha)$$

यही साम्यावस्था में क्षैतिज से छड़ का झुकाव कोण θ के लिए संबंध है। प्रमाणित।

अध्याय 4

कैटेनरी

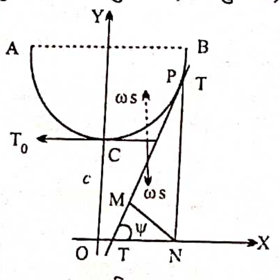
[CATENARY]

§ 4·1. प्रस्तावना (Introduction)

एक डोरी जो मुड़ने में अपने किसी भी बिन्दु पर प्रतिरोध नहीं करता है, एक **वितान्य डोरी** (Flexible string) कहलाता है। एक **पूर्णतः वितान्य डोरी** (Perfectly flexible string) के किसी अभिलम्ब काट (Normal section) पर प्रतिक्रिया एक एकल बल होता है जो डोरी पर स्पर्शी के अनुदिश लगता है। यदि डोरी की प्रति इकाई लम्बाई का भार नियत रहता है, तो उसे **सामान्य कैटेनरी** अथवा **सामान्य रज्जु** (common catenary) कहते हैं। यदि एक भारी समांग डोरी अथवा जंजीर दो बिन्दुओं के मध्य मुक्त रूप से लटकता है, जो कि एक ही उदग्र रेखा में नहीं है, तब जिस वक्र में वह लटकता है एक **कैटेनरी** (Catenary) कहलाता है।

§ 4·2. कैटेनरी का समीकरण प्राप्त करना (To Find the Equation of the Catenary)

(बिलासपुर 2010; सरगुजा 10; रायपुर 10)



चित्र

माना कि एक समांग डोरी ACB दो बिन्दुओं A तथा B के मध्य मुक्त रूप से लटकता है, जहाँ A तथा B एक ही उदग्र रेखा पर नहीं हैं। माना C कैटेनरी ACB का सबसे नीचे का बिन्दु (lowest point) है। माना कि बिन्दु P कैटेनरी पर एक बिन्दु इस प्रकार है कि चाप $CP = S$ तथा माना कि T एवं T_0 क्रमशः बिन्दुओं P तथा C पर डोरी में तनाव (tensions) हैं। यदि ω डोरी का प्रति इकाई लम्बाई भार हो, तो डोरी के भाग CP का भार ωs होगा।

अब डोरी का यह भाग CP निम्न तीन बलों के अन्तर्गत साम्यावस्था में होगा :

(i) बिन्दु C पर क्षैतिज दिशा में लगने वाला तनाव T_0;

(ii) बिन्दु P पर स्पर्श रेखा की दिशा में लगने वाला तनाव T तथा

(iii) भाग CP का उदग्रतः नीचे की ओर लगने वाला भार ωs

यदि ψ बिन्दु P पर स्पर्श रेखा का क्षैतिज रेखा के झुकाव हो, तब चित्र से,

$$T\cos\psi = T_0$$

तथा
$$T\sin\psi = \omega s$$

माना कि सबसे नीचे के बिन्दु C पर तनाव डोरी की c लम्बाई के भार के बराबर है अर्थात् $T_0 = \omega c$, तब समी. (1) से,

$$T\cos\psi = \omega c$$

अतः समी. (2) तथा (3) से,

$$\tan\psi = \frac{s}{c}$$

अर्थात्
$$\boxed{s = c\tan\psi}$$

यह समीकरण (4) **कैटेनरी का नैज समीकरण** (Intrinsic equation) कहलाता है।

पुनः समीकरण (4) से हम पाते हैं कि नैज समीकरण

$$\frac{s}{c} = \tan\psi$$

$$= \frac{dy}{dx}, \qquad \left[\because \frac{dy}{dx} = \tan\psi\right]$$

जब X- अक्ष क्षैतिज एवं Y- अक्ष उदग्र हो।

अब समीकरण (5) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{c}\frac{ds}{dx}$$

$$= \frac{1}{c}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \qquad \left[\because \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right]$$

$$\therefore \quad \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{1}{c}$$

अतः समाकलन करने पर, हम पाते हैं कि

$$\sinh^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{x}{c} + C_1, \quad \left[\because \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1}x\right]$$

जहाँ C_1 समाकलन अचर है। ...(6)

अब यदि Y-अक्ष बिन्दु C से गुजर रहा हो, तो $x = 0$ के लिए $\frac{dy}{dx} = 0$ और तब समी. (6) से,

$$0 = 0 + C_1$$

अर्थात्
$$C_1 = 0$$

अतः समी. (6) से,

$$\frac{dy}{dx} = \sinh\frac{x}{c} \qquad ...(7)$$

$$\Rightarrow \quad dy = \sinh\frac{x}{c}\,dx$$

समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$y = c\cosh\frac{x}{c} + C_2 \qquad ...(8)$$

जहाँ C_2 समाकलन अचर है।

पुनः यदि मूलबिन्दु O को बिन्दु C से गहराई (depth) c पर लिया जाये, तब $y = c$ होगा।

जब $x = 0$ और तब समी. (8) से,

$$c = c\cosh 0 + C_2$$

अर्थात्
$$c = c + C_2$$

अर्थात्
$$C_2 = 0$$

अतः समी. (8) से, हम पाते हैं कि

$$\boxed{y = c\cosh\frac{x}{c}} \qquad ...(9)$$

यह समीकरण (9) **कैटेनरी** अथवा **सामान्य कैटेनरी** (Common Catenary) का **कार्तीय समीकरण** (Cartesian equation) कहलाता है। **(रायपुर 2010; बिलासपुर 10; सरगुजा 12)**

§ 4·3. कैटेनरी के प्रगुण (Properties of the Catenary)

I. s तथा x के बीच सम्बन्ध (Relation between s and x)—

समी. (4) से, हम पाते हैं कि

$$s = c\tan\psi$$

$$= c\frac{dy}{dx}$$

$$= c\sinh\frac{x}{c}. \qquad [\text{ समी. (7) से }]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{s = c\sinh\frac{x}{c}} \qquad ...(10)$$

यह कैटेनरी का s तथा x में उसी प्रकार समीकरण है, जिस प्रकार समी. (9) कैटेनरी का y तथा x में तथा समी. (4) कैटेनरी का s तथा ψ में समीकरण है।

II. y तथा s के बीच सम्बन्ध (Relation between s and y)—

समी. (9) तथा (10) से हम, पाते हैं कि

$$y^2 - s^2 = c^2\left[\cosh^2\frac{x}{c} - \sinh^2\frac{x}{c}\right] = c^2.1 = c^2$$

$$\therefore \quad \boxed{y^2 = c^2 + s^2} \qquad ...(11)$$

यह कैटेनरी का y तथा s में समीकरण है।

III. y तथा ψ के बीच सम्बन्ध (Relation between y and ψ)— **(बिलासपुर 2004, 09; सरगुजा 11)**

समी. (4) तथा (11) से, हम पाते हैं कि

$$y^2 = c^2 + c^2\tan^2\psi$$

$$= c^2(1+\tan^2\psi)$$

$$= c^2\sec^2\psi$$

$$\therefore \quad \boxed{y = c\sec\psi} \qquad ...(12)$$

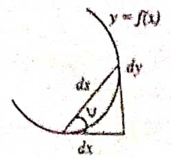
यह कैटेनरी का y तथा ψ में समीकरण है।

IV. x तथा ψ के बीच सम्बन्ध (Relation between x and ψ)— **(बिलासपुर 2004, 09, 11)**

समीकरण (4) से हम, पाते हैं कि

$$s = c\tan\psi$$

अतः ψ के सापेक्ष अवकलन करने पर,



$$\frac{ds}{d\psi} = c\sec^2\psi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{ds}{dx}\cdot\frac{dx}{d\psi} = c\sec^2\psi$$

$$\Rightarrow \quad \sec\psi\frac{dx}{d\psi} = c\sec^2\psi, \qquad \left[\because \cos\psi = \frac{dx}{ds}\right]$$

$$\Rightarrow \quad dx = c\sec\psi\,d\psi$$

अतः अवकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$x = c\log(\sec\psi + \tan\psi) + C_3 \quad ...(13)$$

जहाँ C_3 समाकलन अचर है।

हम देखते हैं कि सबसे नीचे के बिन्दु c पर, $x = 0$ तथा $\psi = 0$, अतएव समी. (13) से,

$$C_3 = 0$$

अतः $C_3 = 0$ रखने पर, समी. (13) से हम पाते हैं कि

$$\boxed{x = c\log(\sec\psi + \tan\psi)} \quad ...(14)$$

यह कैटेनरी का x तथा ψ में समीकरण कहलाता है।

V. x, y तथा s के मध्य सम्बन्ध (Relation amongst x, y and s)—

समीकरणों (14), (12) तथा (4) से हम पाते हैं कि

$$x = c\log\left(\frac{y}{c} + \frac{s}{c}\right) \quad \text{(बिलासपुर 2011)} ...(15)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y + s = ce^{x/c}} \quad \text{(बिलासपुर 2012)} ...(16)$$

समी. (15) अथवा (16) कैटेनरी का x, y एवं s के पदों में समीकरण है।

समी. (11) तथा (15) से हमें निम्न सम्बन्ध भी प्राप्त होता है—

$$x = c\log\left\{\frac{\sqrt{c^2 + s^2} + s}{c}\right\} \quad ...(17)$$

VI. तनाव T एवं कोटि y के बीच सम्बन्ध (Relation between tension T and ordinate y)

समीकरण (3) से, हम पाते हैं कि

$$T\cos\psi = \omega c$$

$$\Rightarrow \quad T = \omega c.\sec\psi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T = \omega y} \quad [\text{ समी. (12) से }] ...(18)$$

समी. (18) से स्पष्ट है कि **कैटेनरी के किसी बिन्दु पर तनाव T उस बिन्दु की नियता (directrix) से ऊँचाई के अनुरूप विचरण करती है।**

$= $ चेन की $\sqrt{\dfrac{a^3}{6(l-a)}}$ लम्बाई का भार।

प्रमाणित।

पुनः $\quad y = \dfrac{c}{2}\left[e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{c}}\right], \quad \left[\because y = \dfrac{c}{2}(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}})\right]$

जहाँ y चेन के छोर की कोटि (ordinate) है।

$$\therefore \quad y = \frac{c}{2}\left[2 + 2.\frac{a^2}{2c^2} + 2.\frac{a^4}{24c^4} + \ldots\right]$$

$$= c + \frac{a^2}{2c} + \frac{a^4}{24c^3} + \ldots$$

अतः निम्नतम बिन्दु का इसके छोरों से झुकाव

$$= y - c$$

$$= \frac{a^2}{2c} \quad \text{(लगभग)}$$

$$= \frac{a^2}{2}\sqrt{\frac{6(l-a)}{a^3}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{6a(l-a)}.$$

प्रमाणित।

उदाहरण 3. समान तल पर के दो बिन्दुओं के बीच एक समांग चेन का दिया हुआ लम्बाई $2s$ लटकाया जाना है तथा तनाव चेन के b लम्बाई के भार से नहीं बढ़ना चाहिए। दर्शाइये कि अधिकतम विस्तार $\sqrt{(b^2 - s^2)}\log\{b+s)/(b-s)\}$ है।

(बिलासपुर 2005, 07; रायपुर 13)

हल : विस्तार अधिकतम तब होगा जब अन्त्य तनाव अर्थात् लटकाव बिन्दुओं पर तनाव महत्तम हो।

पुनः महत्तम तनाव $= \omega b$,

जहाँ ω चेन की प्रति इकाई लम्बाई का भार है।

अतः यदि T किसी एक लटकाव बिन्दु पर तनाव हो, तो

$$T = \omega b, \qquad \ldots(1)$$

यदि ψ_1 उस लटकाव बिन्दु पर की स्पर्श रेखा का झुकाव कोण हो, तो

$T\sin\psi = \omega s$ से, हम पाते हैं कि

$$\omega b \sin\psi_1 = \omega s$$

$$\Rightarrow \sin\psi_1 = \frac{s}{b}$$

$$\therefore \quad \tan\psi_1 = \frac{s}{\sqrt{b^2 - s^2}} \text{ तथा } \sec\psi_1 = \frac{b}{\sqrt{b^2 - s^2}}$$

पुनः $\quad s = c\tan\psi$ से, हम पाते हैं कि

$$s = \frac{cs}{\sqrt{b^2 - s^2}}$$

$$\Rightarrow \quad c = \sqrt{b^2 - s^2}$$

अतः $\quad$ अभीष्ट विस्तृति $= 2x$

$$= 2c\log(\tan\psi_1 + \sec\psi_1)$$

$$= 2\sqrt{b^2 - s^2}\log\left(\frac{s}{\sqrt{b^2 - s^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 - s^2}}\right)$$

$$= 2\sqrt{b^2 - s^2}\log\left(\frac{b+s}{\sqrt{b^2 - s^2}}\right)$$

$$= 2\sqrt{b^2 - s^2}\log\sqrt{\frac{b+s}{b-s}}$$

$$= \sqrt{b^2 - s^2}\log\{(b+s)/(b-s)\}.$$ प्रमाणित।

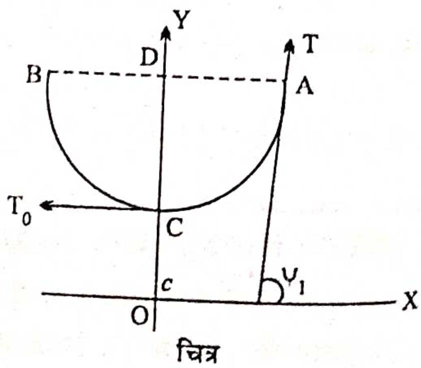
उदाहरण 4. समान क्षैतिज रेखा में स्थित दो बिन्दु A तथा B से लम्बाई l का एक समांग चेन इस प्रकार लटकाया जाता है कि कोई भी अन्त्य तनाव (terminal tension) निम्नतम बिन्दु पर के तनाव का n गुणा है। दर्शाइये कि विस्तार निश्चित ही $\dfrac{l}{\sqrt{(n^2-1)}}\log(n + \sqrt{n^2 - 1})$ होना चाहिए।

(रायपुर 20

हल: यहाँ चेन ACB की लम्बाई $= l$

$\therefore \quad$ चाप CA की लम्बाई $= \dfrac{1}{2}l$

पुनः यदि T अन्त्य तनाव हो अर्थात् A एवं B पर तनाव तथा T_0 निम्नतम बिन्दु पर तनाव हो, तो यहाँ



चित्र

मिलेगा।

उदाहरण 12. (b) भार W के एक समांग (homogene-ous) डोरी को एक ही स्तर पर स्थित दो बिन्दुओं से लटकाया गया है और एक भार W' इसके निम्नतम बिन्दु से सम्बद्ध कर दिया गया है। यदि α और β अब उच्चतम और निम्नतम बिंदुओं पर स्पर्श रेखाओं का क्षैतिज से झुकाव है, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = 1 + \frac{W}{W'}.$$

(रायपुर 2006, 11;बिलासपुर 11)

हल : मानलो डोरी को बिन्दुओं A, B पर क्षैतिज में लटकाया जाता है। इस समांग डोरी का भार W इसके मध्य बिन्दु V पर नीचे की ओर कार्यरत होगा।

माना भार W' लगने के पूर्व डोरी की आकृति AVB है तथा W' लगने के पश्चात् $AV'B$ है।

मानो कि कैटेनरी $AV'B$ का शीर्ष C है तथा प्राचल c है।

माना T तथा T' क्रमशः A तथा V' पर तनाव है।

माना T तथा T' के वियोजित भाग क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर दिशाओं में क्रमशः x, y और x_1, y_1 है तब,

$$y + y = W + W'$$

$$\Rightarrow \qquad y = \frac{1}{2}(W + W') \qquad \ldots(1)$$

तथा $$\tan\alpha = \frac{y}{x} \qquad \ldots(2)$$

इसी प्रकार, $y_1 + y_1 = W'$

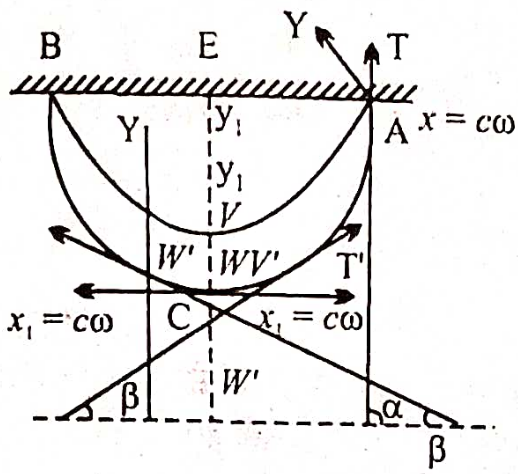
$$\Rightarrow \qquad y_1 = \frac{1}{2} W' \qquad \text{...(3)}$$

तथा
$$\tan \beta = \frac{y_1}{x_1} \qquad \text{...(4)}$$

पुनः
$$x_1 = x = \omega c \qquad \text{...(5)}$$

जहाँ ω डोरी के प्रति इकाई लम्बाई का भार है।

समी. (2) तथा (4) से,



चित्र : कैटेनरी *AVB* के निम्नतम बिन्दु '*V* पर भार *W*" लटकाने पर यह *ACB* कैटेनरी है।

$$\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{y/x}{y_1/x_1} = \frac{\frac{1}{2}(W+W')/\omega c}{\left(\frac{1}{2}\right)/\omega c}$$

$$= 1 + \frac{W}{W'}.$$

अतएव उच्चतम और निम्नतम बिंदुओं पर स्पर्श रेखाओं का क्षैतिज से झुकाव α, β निम्नांकित समीकरण द्वारा दिए जायेंगे :

$$\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = 1 + \frac{W}{W'}.$$ **प्रमाणित।**

उदाहरण 13. (a) लम्बाई 2l के एक भारी चेन का एक